

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИСКРЕТНО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ И ПОВЕРАТИВНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ¹

Султанова В. С.

Бакинский Славянский Университет , Баку, Азербайджан
Докторант Ленкоранского Государственного Университета
e-mail: yusalya.sultanova@mail.ru

Резюме: Излагаемая работа посвящена исследованию решению задачи Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными по различным переменным. Определяя общее решение рассматриваемого уравнения, которое содержит некоторые произвольные постоянные. Эти произвольные постоянные определяются с помощью заданных начальных данных.

Ключевые слова: Дискретно мультипликативная производная, дискретно поверативная производная, двумерное уравнение, уравнение второго порядка, задача Коши, общее решение.

AMS Subject Classification: УДК39А20

1. Введение: Задачи для дискретно мультипликативной производной впервые были рассмотрены в работах [12] и [7]. В [12] -ой работе исследуется задача Коши и граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативной производной. А во [7]-ой рассматривается задача Коши и граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго с дискретно поверативной производной

Далее рассматривается поверативная производная как в непрерывном случае, так и в дискретном случае также определена в работах [3] – [4]. В этих работах исследуются задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дискретно поверативно-мультипликативной и мультипликативно – поверативной производной.

Аналогичные работы для обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными исследованы в [9] и [14].

¹The work was presented at the webinar of the Institute of Applied Mathematics 16.11.2021

Граничные задачи для дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и дискретно мультипликативными производными были рассмотрены в работе [2].

Продолжения этих работ ,которые содержат задачи для дифференциального уравнения с дискретно поверативные производные рассматриваются в работах [1]и[5].

Арифметика дискретно аддитивного анализа излагается в работе[6]. Здесь введен аналог степенной и инвариантной функции относительно дискретно аддитивной производной.

Изложение дискретно мультипликативного анализа посвящена работа [7].

Для обоснования полученных новых производных и интеграла приводятся в виде развития числового множества [8]. Наконец задача Коши и граничная задача для дифференциального уравнения с тремя дискретными производными приведены в работах[9]и[10].

Инвариантные функции для дискретно аддитивных и дискретно мультипликативных производных исследуется в работе [15].

В работах [16] – [19] рассмотрены задачи Коши и граничные задачи для дифференциальных уравнений с дискретно аддитивными, дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными.

Излагаемая работа посвящена задаче Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативной и дискретно поверативной производной по различным аргументам. Исходя из определения дискретно поверативной производной уравнения второго порядка с дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными сводятся к уравнению первого порядка содержащая лишь только дискретно мультипликативную производную.

Далее исходя из определения дискретно мультипликативной производной определяется решение полученного уравнения первого порядка

С этим определяется общее решение дискретной производной второго порядка, который зависит от двух произвольных последовательностей

Эти произвольные последовательности определяются с помощью заданных начальных данных. Таким образом мы получаем решение задачи Коши для двумерного дискретного дифференциального уравнения с частными производными

2. Постановка задачи:

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_2^{\{3\}} D_1^{\{1\}} u_{mn} = f_{mn}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

где f_{mn} при $m \geq 0, n \geq 0$ – заданная вещественнозначная последовательность, u_{mn} - искомая последовательность.

Дискретно мультипликативная производная по первому аргументу имеет вид:

$$D_1^{[1]}u_{mn} = \frac{u_{m+1n}}{u_{mn}}, \quad (2)$$

а дискретно поверативная производная по второму аргументы даётся в виде:

$$D_2^{\{1\}}u_{mn} = u^{mn} \sqrt{u_{mn+1}}, \quad (3)$$

Тогда учитывая определение (3) уравнение (1) представим в виде:

$$D_1^{[1]u_{mn}} \sqrt{D_1^{[1]}u_{mn+1}} = f_{mn},$$

возводя в степень $D_1^{[1]}u_{mn}$, имеем:

$$D_1^{[1]}u_{mn+1} = f_{mn}^{D_1^{[1]}u_{mn}} \quad m \geq 0, \quad n \geq 0 \quad (4)$$

Теперь в (4) давая n значение начиная от нуля, получим:
 $n = 0$

$$D_1^{[1]}u_{m1} = f_{m0}^{D_1^{[1]}u_{m0}}, \quad m \geq 0, \quad (5)$$

$n = 1,$

$$D_1^{[1]}m_2 = f_{m1}^{D_1^{[1]}u_{m1}}, \quad m \geq 0, \quad ,$$

учитывая (5), имеем:

$$D_1^{[1]}u_{m2} = f_{m1}^{f_{m0}^{D_1^{[1]}u_{m0}}}, \quad m \geq 0, \quad (6)$$

при $n = 2$, из (4) получим:

$$D_1^{[1]}u_{m3} = f_{m2}^{D_1^{[1]}u_{m2}}, \quad m \geq 0, \quad ,$$

учитывая (6) находим:

$$D_1^{[1]}u_{m3} = f_{m2}^{f_{m1}^{f_{m0}^{D_1^{[1]}u_{m0}}}}}, \quad m \geq 0, \quad (7)$$

Продолжая этот процесс из (4) имеем:

$$D_1^{[1]}u_{mn} = \begin{matrix} & & & & D_1^{[1]}u_{m0} \\ & & & f_{m1}^{m0} & \\ & & f_{m1}^{m0} & & \\ & f_{mn-2}^{mn-2} & & & \\ f_{mn-1}^{mn-2} & & & & \end{matrix}, \quad m \geq 0, \quad (8)$$

Принимаем следующие обозначения:

$$f_{mn-1}^{mn-2} = g_{mn} \left(f_{mk} D_1^{[1]}u_{m0} \right), \quad m \geq 0. \quad (9)$$

Тогда уравнения (8) примут вид:

$$D_1^{[1]}u_{mn} = g_{mn}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (10)$$

Исходя из определения (2) уравнения (10) представим в виде:

$$\frac{u_{m+1n}}{u_{mn}} = g_{mn}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

Теперь зададим индексу m значения, начиная от нуля, т.е. при $m = 0$, имеем:

$$\frac{u_{1n}}{u_{0n}} = g_{0n}, \quad n \geq 1, \quad (12_0)$$

при $m = 1$,

$$\frac{u_{2n}}{u_{1n}} = g_{1n}, \quad n \geq 1, \quad (12_1)$$

при $m = 2$

$$\frac{u_{3n}}{u_{2n}} = g_{2n}, \quad n \geq 1, \quad (12_2)$$

Давая m значение $m-1$, из (11) получим:

$$\frac{u_{mn}}{u_{m-1n}} = g_{m-1n}, \quad m \geq 1, \quad (12_{m-1})$$

Умножая (12_к) при $k = 0$ до $k = m-1$, имеем:

$$\frac{u_{1n}}{u_{0n}} \cdot \frac{u_{2n}}{u_{1n}} \cdot \frac{u_{3n}}{u_{2n}} \dots \frac{u_{mn}}{u_{m-1n}} = \prod_{k=0}^{m-1} g_{kn}, \quad m \geq 1, n \geq 1,$$

или

$$\frac{u_{mn}}{u_{0n}} = \prod_{k=0}^{m-1} g_{kn}, \quad m \geq 1, n \geq 1,$$

или же

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{k=0}^{m-1} g_{kn}, \quad m \geq 1, n \geq 1. \quad (13)$$

Таким образом, для общего решения уравнения (1) получили представления (13), где u_{0n} - произвольная последовательность, а g_{kn} определяется в виде:

$$g_{kn} = \overset{u_{k+10}}{\underset{u_{k0}}{f_{k1}^{k0}}} \dots \overset{u_{k+10}}{\underset{u_{k0}}{f_{kn-1}^{kn-1}}}, \quad k \geq 0, n \geq 1, \quad (14)$$

где u_{k0} также является произвольной последовательностью.

Теорема 1. Пусть f_{mn} при $m \geq 0, n \geq 0$ – заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (1) имеет вид (13), где g_{kn} даётся в виде (14), а u_{0n} и u_{k0} являются произвольными последовательностями.

Теперь к уравнению (1) присоединим следующее начальное условие:

$$\begin{aligned} u_{0n} &= \alpha_n, \quad n \geq 0, \\ u_{k0} &= \beta_k, \quad k \geq 0, \alpha_0 = \beta_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда решение задачи Коши (1), (15) полученное из общего решения (13) имеет вид:

$$u_{mn} = \alpha_n \prod_{k=0}^{m-1} g_{kn}, \quad m \geq 1, n \geq 0. \quad (16)$$

$$g_{kn} = f_{kn-1}^{f_{kn-2}^{f_{k1}^{f_{k0}^{\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}}}}}, \quad k \geq 0, n \geq 1, \quad (17)$$

$$g_{k0} = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}, k \geq 0. \quad (18)$$

С этим получено следующее утверждение.

Теорема 2. При условиях теоремы 1, если $\alpha_n, n \geq 0$ и β_k при $k \geq 0$ являются заданными вещественными последовательностями $\alpha_0 = \beta_0$, то тогда решение задачи Коши (1), (15) имеет решение в виде (16), где g_{kn} даётся в виде (17) и (18).

Заключение: В данной работе рассматривалась задача Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативным и дискретно поверативными производными. Исходя из определения мультипликативной производной определяется решение уравнения первого порядка. С этим определяется общее решение дискретной производной второго порядка, которое зависит от двух произвольных последовательностей. Эти произвольные последовательности определяются с помощью заданных начальных данных. Таким образом мы получаем решение задачи Коши для двумерного дискретного дифференциального уравнения с частными производными.

Литература

1. Aliev N.A. About history of numbers, the Library of Schoolchild. Mathematics, № 40, 2010, 48 p.
2. Aliev N.A., Bagirov G.A., Isayeva A.N. Discrete multiplicative analysis. Producing of Scienific Conference on “Modern Problems of Mathematics, Informatics and Economics”. Azerbaijan. Baki, 2010, pp. 24 – 30.
3. Aliyev N.A, Ibrahimov N.Z., Mammadzada A.M. Problems for discrete poverative- multiplicative derivatives of equations. ATU, technical sciences. Scientific works, No. 2, Baku, 2018, pp. 90-94.
4. Aliyev N.A., Ibrahimov N.Z, Mammadzada A.M. Solution of Cauchy and boundary problems for discrete multiplicative-poverative derivatives of equations. BEU, I International Scientific and Practical Conference “Science and Technology”. Baku, 2018, pp. 91-94.
5. Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Mammadzada A.M. On a solution of the Canchy problem for the disrete equation with poverative-multiplicative-additive derivatives. XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018). Abstracts, pp. 16 – 17.

6. Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Mammadzada A.M. Solution of Cauchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-poverative derivative equation, Ukraina. Vestnik Київського Національного Університету Імені Тараса Шевченка, сер. физ.-матем. наук, вып. № 1, 2018, pp. 50 – 55.
7. Aliyev N.A, Mammadzada A.M. Solution of problems for second order discrete poverative derivatives of equations. Scientific news. Natural Sciences, No. 1. Lankaran, 2018, pp. 55-58.
8. Aliyev N.A., Mamiyeva T.S. Boundary problems for second order discrete multiplicative derivatives of equation. News of BU, series of physical and mathematical sciences, No. 1, 2017, pp. 15-19.
9. Aliev F.A., Aliev N.A.,Safarova N.A, Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl. Comp. Math, 2018,V.17, N.3,pp.317-322.
10. Aliev F.A., Aliev N.A., Muttalimov. M.M., Namazov. A.A., Identification method for defining the order of the fractional derivative oscillatory system, Proceedings of IAM, 2019, V.8, N.1, pp 3-13.
11. Hassani O.L., Aliev N.A. Analytic Approach silve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations , International Mathematical Forum Journal for Theory and Applications 2008,№33-36 V .3, pp.1623-1631.
12. Mammadzada A.M. Features of new discrete derivatives, Materials of Young Researchers of the Republic Scientific Conference on “Modernizing Azerbaijan: New stages of growth”. Lankaran, 2017, pp. 29-30.
13. Mammadzada A.M., Aliev N.A., Ibrahimov N.S. Solution of Cauchy problem for third discrete derivative additive-multiplicative-poverative derivative equation. XXXII International Conference Problems of Decision Maing Under Uncertainties (PDMU – 2018). Abstracts, pp. 84 – 86.
14. Izadi F.A., Aliev N..A. Bagirov G. Discrete Calculus By Analogy. Canada, 2009, 154 p.
15. Jahanshahi M., Ahmadvkhanlu A., Aliev N.M., Fatemi M. Disvrete Additive and Multiplicative Differentialiton and Integraliton and their Invariant Functions, Journal of Contemporary Applied Mathematics. Vol. 1, № 1, 2011, pp. 28 – 35.
16. Sultanova V. Boundary value problem for an equation with second-order partial duscrete derivatives, XXXVI International Conference Problems of Decision making Under Uncertainties (PDMU – 2021), may 11 – 14, 2021. Dlicated to 80-th anniversary of Professor Mykhailo Bartish, pp. 105 – 107.
17. Sultanova V. Problems for the first-order differential equations with discrete additive and discrete multiplicative derivatives , Journal of Conferary applied Mathemstics. V. 10, № 1, 2020, July. ISSN 2222-5498, pp. 64 – 71.
18. Sultanova V. Construction of the Adjoint problem to the discrete problems for the second order equation, Advanced Mathematical Models &Applications. Vol. 6, № 2, 2021, pp. 182 – 188.
19. Султанова В. Задачи Коши для уравнения второго порядка с дискретными производными., Новости Педагогического Университета Серия Математики и естественных наук , 2021, № 2, стр. 39 – 44.

**CAUCHY PROBLEM FOR TWO- DIMENSIONAL SECOND- ORDER
DIFFERENTIAL EQUATION
WITH DISCRETE MULTIPLICATIVE AND POWERATIVE
DERIVATIVES.**

Sultanova V.S.

Baku Slavic University , Baku ,Azerbaijan.
Doctoral student of Lankaran State University .

Abstract: Presented work is devoted to the study of the solution of Cauchy problem for two- dimensional second- order differential equation with discrete multiplicative and discrete powerative derivatives on different variables. General solution of the equation in question was determined, which contains some arbitrary constants. These arbitrary constants are determined using given initial data.

Keywords: Discrete multiplicative derivative, discrete powerative derivative, two-dimensional equation, second- order equation, Cauchy problem, general solution.

REFERENCES

1. Aliev N.A. About history of numbers, the Library of Schoolchild. Mathematics, № 40, 2010, 48 p.
2. Aliev N.A., Bagirov G.A., Isayeva A.N. Discrete multiplicative analysis. Producing of Scientific Conference on “Modern Problems of Mathematics, Informatics and Economics”. Azerbaijan. Baki, 2010, pp. 24 – 30.
3. Aliyev N.A, Ibrahimov N.Z., Mammadzada A.M. Problems for discrete powerative-multiplicative derivatives of equations. ATU, technical sciences. Scientific works, No. 2, Baku, 2018, pp. 90-94.
4. Aliyev N.A., Ibrahimov N.Z, Mammadzada A.M. Solution of Cauchy and boundary problems for discrete multiplicative-powerative derivatives of equations. BEU, I International Scientific and Practical Conference “Science and Technology”. Baku, 2018, pp. 91-94.
5. Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Mammadzada A.M. On a solution of the Canchy problem for the discrete equation with powerative-multiplicative-additive derivatives. XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018). Abstracts, pp. 16 – 17.
6. Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Mammadzada A.M. Solution of Canchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-powerative derivative equation, Ukraina. Vestnik Київського Національного Університету Імені Тараса Шевченка, сер. физ.-матем. наук, вып. № 1, 2018, pp. 50 – 55.
7. Aliyev N.A, Mammadzada A.M. Solution of problems for second order discrete powerative derivatives of equations. Scientific news. Natural Sciences, No. 1. Lankaran, 2018, pp. 55-58.

8. Aliyev N.A., Mamiyeva T.S. Boundary problems for second order discrete multiplicative derivatives of equation. News of BU, series of physical and mathematical sciences, No. 1, 2017, pp. 15-19.
9. Aliev F.A., Aliev. N A.,Safarova N.A, Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl. Comp. Math, 2018,V.17, N.3,pp.317-322.
10. Aliev F.A., Aliev N.A., Muttalimov. M.M., Namazov. A.A., Identification method for defining the order of the fractional derivative oscillatory system, Proceedings of IAM, 2019, V.8, N.1, pp 3-13.
11. Hassani O.L., Aliev N.A. Analytic Approach silve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations , International Mathematical Forum Journal for Theory and Applications 2008,№33-36 V .3, pp.1623-1631
12. Mammadzada A.M. Features of new discrete derivatives, Materials of Young Researchers of the Republic Scientific Conference on “Modernizing Azerbaijan: New stages of growth”. Lankaran, 2017, pp. 29-30.
13. Mammadzada A.M., Aliev N.A., Ibrahimov N.S. Solution of Canchy problem for third discrete derivative additive-multiplicative-derivative equation. XXXII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2018). Abstracts, pp. 84 – 86.
14. Izadi F.A., Aliev N..A. Bagirov G. Discrete Calculus By Analogy. Canada, 2009, 154 p.
15. Jahanshahi M., Ahmadvanlu A., Aliev N.M., Fatemi M. Discrete Additive and Multiplicative Differential and Integral and their Invariant Functions, Journal of Contemporary Applied Mathematics. Vol. 1, № 1, 2011, pp. 28 – 35.
16. Sultanova V. Boundary value problem for an equation with second-order partial discrete derivatives, XXXVI International Conference Problems of Decision making Under Uncertainties (PDMU – 2021), may 11 – 14, 2021. Dedicated to 80-th anniversary of Professor Mykhailo Bartish, pp. 105 – 107.
17. Sultanova V. Problems for the first-order differential equations with discrete additive and discrete multiplicative derivatives , Journal of Conferary applied Mathemstics. V. 10, № 1, 2020, July. ISSN 2222-5498, pp. 64 – 71.
18. Sultanova V. Construction of the Adjoint problem to the discrete problems for the second order equation, Advanced Mathematical Models &Applications. Vol. 6, № 2, 2021, pp. 182 – 188.
19. Sultanova V. Zadachi Koshi dlya uravneniya vtorogo poryadka s diskretnymi proizvodnymi., Novosti Pedagogicheskogo Universiteta Seriya Matematiki i estestvennykh nauk , 2021, № 2, str. 39 – 44. (Sultanova V. Cauchy problem for second order discrete derivatives of equation, News of the Pedagogical University. Series of Mathematics and Natural Sciences, 2021, № 2, pp. 39-44) (in Russian).